Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 10

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Finde die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis über $\mathbb{C}$ für:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir das charakteristische Polynom

$$\chi_A = X(X-2)^4$$

einfach ablesen. Wir sehen direkt, dass $\lambda_1 = 0$ ein einfacher Eigenwert von A ist und es somit einen Jordanblock der Größe 1 gibt.

Für $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_2 = 4$ müssen wir die Dimensionen der Haupträume bestimmen um Anzahl und Größen der Jordanblöcke zu bestimmen. Wir bestimmen

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und bestimmen weiter

$$\ker(A-2) = \left\langle e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2)^2 = \left\langle e_1, e_2, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2)^3 = \left\langle e_1, e_2, e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir können aus der Dimension des Eigenraums ablesen, dass es zwei Blöcke zu 2 gibt; Und da $\dim \ker(A-2)^3 = 4 = \alpha_2$ gilt, hat der größte Block Größe 3. Das heißt wir haben einen Block der Größe 3 und einen Block der Größe 1.
Wir wollen nun noch eine Jordanbasis bestimmen. Wir beginnen mit dem Jordanblock zu 0. Wir wählen dazu einen Vektor aus $\ker(A)$, beispielsweise

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da wir keine weiteren Vektoren benötigen, sind wir mit 0 fertig. Wir betrachten als nächstes den Block der Größe 3 zum Eigenwert 2. Wir wählen dazu einen Block aus $\ker(A-2)^3 \setminus \ker(A-2)^2$, zum Beispiel $v_3 = e_3$, dann gilt

$$v_2 = (A-2)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = (A-2)v_2 = 9e_1$$

und für den Block der Größe 1 wählen wir einen Vektor $v_4 \in \ker(A-2) \setminus \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, beispielsweise

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

damit erhalten wir

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

1. Bestimme den Winkel zwischen $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Finde die Cosinus des Dreiecks ABC mit Ecken

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. Wir bestimmen den Winkel mithilfe der Winkelgleichung. Es gilt

$$\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$$

und da $\langle u, v\rangle = 0$ gilt, erhalten wir $\angle(u, v) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

2. Wir wollen die Winkel zwischen den Schenkeln des Dreiecks bestimmen. Das sind allerdings nicht die Winkel zwischen den Vektoren A, B und C, sondern die Vektoren zwischen den Verbindungslinien zwischen diesen Punkten. Wir bestimmen zuerst:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\overline{BA} = -\overline{AB}$ und analog für die anderen Vektoren. Es gilt damit

$$\alpha := \angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right) \approx 36,81^\circ$$
$$\beta := \angle(\overline{BA}, \overline{BC}) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{78}}\right) \approx 25,07^\circ$$
$$\gamma := \angle(\overline{CA}, \overline{CB}) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{18}}\right) \approx 118,13^\circ$$

Die Angabe der Ergebnisse in Grad macht hier insofern wenig Sinn, als dass es nur Rundungen gibt - ~ $36,81^\circ$ ist ein fehlerhaftes Ergebnis, während $\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$ ein korrektes Ergebnis ist. Der einzige Nutzen ist, dass man die drei Winkel zusammenzählen kann, dabei $180,01^\circ$ erhält und daraus schließen kann, dass das Ergebnis vermutlich korrekt ist.

Aufgabe 3

1. Normiere den Vektor $(3, 1, 2, 1)$
2. Sei $u = (3/5, 4/5)$. Vervollständige u zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt.

Lösung:

1. Wir bestimmen zuerst $\|v\|$. Es gilt

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 15 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{15}$$

und damit ist

$$\hat{v} := \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

ein normierter Vektor.

2. Wollen wir für einen Vektor in $\mathbb{R}^2$ ein orthogonales Gegenstück finden, ist Gram-Schmidt an sich nicht notwendig. Für einen Vektor $u = (a, b)$ können wir $v = (-b, a)$ wählen, da dann

$$\langle v, u\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\rangle = -ba + ab = 0$$

gilt. In diesem Fall wäre eine Möglichkeit also

$$v := \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und $v \in \mathbb{R}^n$. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und $u \in U$ die orthogonale Projektion von v auf U. Zeige, dass der Winkel zwischen u und v der kleinste mögliche Winkel zwischen v und einem Vektor $u' \in U$ ist.

Lösung:

Wir sollen zeigen, dass

$$\angle(u, v) = \min_{u' \in U} \angle(u', v)$$

gilt. Dafür wollen wir nutzen, dass für das orthogonale Komplement zu U:

$$U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U : \langle u, v\rangle = 0\}$$

gilt, dass $V = U \oplus U^\perp$. Jeder Vektor aus V hat also eine eindeutige Darstellung durch einen Vektor aus U und einen Vektor aus $U^\perp$. Insbesondere gilt damit $v = u + \hat{u}$ mit $u \in U$ Und $\hat{u} \in U^\perp$, wobei u mit der orthogonalen Projektion u aus der Angabe übereinstimmt.
Allgemein gilt nun für einen Vektor $u' \in U$, dass

$$\langle u', v\rangle = \langle u', u\rangle + \langle u', \hat{u}\rangle = \langle u', u\rangle$$

da $u' \perp \hat{u}$ per Definition von $U^\perp$. Da

$$\angle(u', v) = \arccos\left(\frac{\langle u', v\rangle}{\|u'\|\|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle u', u\rangle}{\|u'\|\|v\|}\right)$$

gilt, müssen wir um den Winkel zu minimieren das Argument des arccos maximieren, das heißt wir wollen $\frac{\langle u', u\rangle}{\|u'\|\|v\|}$ maximieren. Es gilt laut Cauchy-Schwarz $\langle u', u\rangle \leq \|u'\|\|u\|$ mit Gleichheit lediglich für $u' = u$, also erhalten wir das maximale Ergebnis für $u' = u$, was wir zeigen wollten.